Lösungen zu den Tutoriumsaufgaben

T1. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $e^x \sin(x)$ z.B. mittels zweimaliger partieller Integration.

Lösung Wir integrieren zweimal hintereinander partiell und erhalten:

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \underbrace{e^x}_{g(x)'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} dx \quad \textbf{(I)} \\
&= [e^x \sin(x)] - \int_a^b e^x \cos(x) dx \\
&= [e^x \sin(x)]_a^b - \left([e^x \cos(x)]_a^b - \int_a^b e^x(-\sin(x))dx \right) \\
&= [e^x \sin(x)]_a^b - [e^x \cos(x)]_a^b - \int_a^b e^x \sin(x)dx \quad \textbf{(II)}
\end{aligned}$$

Wie haben die Gleichung **(I)**=**(II)**. Addieren wir auf beiden Seiten das Integral $\int_a^b e^x \sin(x)dx$, so erhalten wir:

$$2\int_a^b e^x \sin(x)dx = [e^x \sin(x)]_a^b - [e^x \cos(x)]_a^b$$

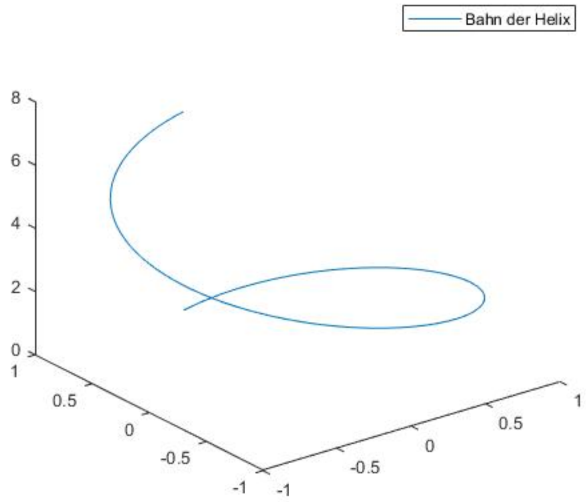
$$\begin{aligned}
\Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b e^x \sin(x)dx &= \frac{1}{2}\left([e^x \sin(x)]_a^b - [e^x \cos(x)]_a^b \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^b(\sin(b) - \cos(b)) - e^a(\sin(a) - \cos(a)) \right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(X) = \frac{1}{2}\left(e^x(\sin(x) - \cos(x))\right) + C$$

Wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist um alle Stammfunktionen abzudecken.

T2. Bestimmen Sie die Bogenlänge der Helix $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.

Lösung



$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$
$\alpha'(t) = (sin(t), cos(t), 1)$
$\Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\underbrace{sin(t)^2 + cos(t)^2}_{=1} + 1^2} = \sqrt{2}$
Jetzt berechnen wir die Bogenlänge $L(\alpha)$ über Definition 3.12 aus der Vorlesung.

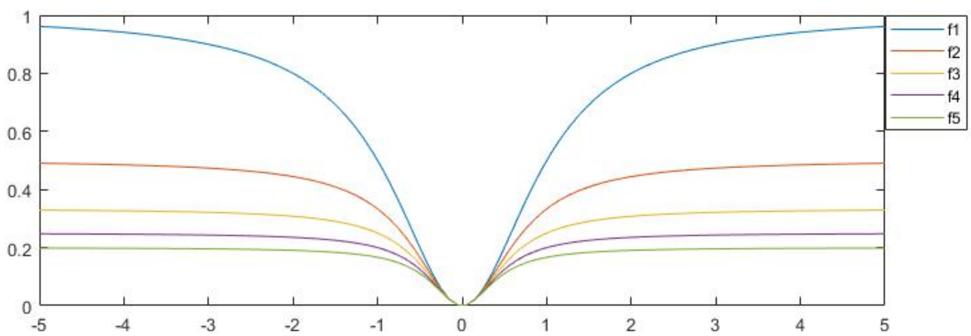
$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \\ &= \left[\sqrt{2}t\right]_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi = 2^{\frac{3}{2}}\pi \end{aligned}$$

T3. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x^2}{1 + nx^2},$$

gleichmäßig konvergiert. Was ist die Grenzfunktion?

Lösung



Dem Verlauf der Funktionenfolge nach zu urteilen konvergiert f_n zumindest punktweise gegen die Nullfunktion. Außerdem scheint die Konvergenzgeschwindigkeit in jedem $f_n(x)$ kaum von x abzuhängen. Vermutung: gleichmäßige Konvergenz ist erfüllt.
Wir zeigen zunächst, dass die Nullfunktion tatsächlich der punktweise Grenzwert ist.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1+nx^2} \overset{l'Hospital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2x}{n2x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Nun überprüfen wir die gleichmäßige Konvergenz.
$f_n \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ gleichmäßig $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{x^2}{1+nx^2} - 0| \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\cancel{x}^2}{n\ \cancel{x}^2} = \frac{1}{n}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Da $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$ und wir haben gleichmäßige Konvergenz gezeigt.